ΟΡΙΑ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ
"ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ"

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω $f: U \to \mathbb{R}$ με $U \subseteq \mathbb{R}^n$ με $\bar{x}_0$ σ.σ. του U ($\Leftrightarrow \exists \bar{x}_\nu \subseteq U \setminus \{\bar{x}_0\} : \bar{x}_\nu \to \bar{x}_0$) και $\ell \in \mathbb{R}$. Τότε λέμε ότι η f συγκλίνει στο ℓ όταν $\bar{x}$ συγκλίνει στο $\bar{x}_0$ αν $\forall (\bar{x}_\nu) \subseteq U \setminus \{\bar{x}_0\} : \bar{x}_\nu \xrightarrow[\nu \to \infty]{} \bar{x}_0 \Rightarrow f(\bar{x}_\nu) \xrightarrow[\nu \to \infty]{} \ell \in \mathbb{R}$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω $f, U, \bar{x}_0, \ell$ όπως πιο πάνω και η f να συγκλίνει στο ℓ όταν το $\bar{x}$ συγκλίνει στο $\bar{x}_0$ (συμβολικά $f(\bar{x}) \to \ell$ όταν $\bar{x} \to \bar{x}_0$)

Τότε ισοδύναμα (ϵ-δ ορισμός)

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \bar{x} \in U \cap B(\bar{x}_0, \delta) \setminus \{\bar{x}_0\} : |f(\bar{x}) - \ell| < \varepsilon$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

($\Rightarrow$) Έστω ότι ισχύει η άρνηση

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists \bar{x} \in U \cap B(\bar{x}_0, \delta) \setminus \{\bar{x}_0\} : |f(\bar{x}) - \ell| \geq \varepsilon$$

Τότε, ειδικότερα

$$(\forall \nu \in \mathbb{N})(\exists \bar{x}_\nu \in B(\bar{x}_0, \tfrac{1}{\nu}) \cap U \setminus \{\bar{x}_0\} : |f(\bar{x}_\nu) - \ell| \geq \varepsilon$$

δηλαδή θέσαμε το $\delta = \frac{1}{\nu}$

Άρα, $\exists \bar{x}_\nu \in U \setminus \{\bar{x}_0\}$ και $\underbrace{\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0}$ με $f(\bar{x}_\nu) \not\to \ell \in \mathbb{R}$ Άτοπο

$\Leftrightarrow (\|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| \to 0$ ενώ $\|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| < \frac{1}{\nu})$

$\Leftrightarrow (\bar{x}_\nu \in B(\bar{x}_0, \frac{1}{\nu}))$

$\Downarrow$

$(\|f(\bar{x}_\nu) - \ell\| \geq \varepsilon)$

($\Leftarrow$) Έστω τώρα $(\bar{x}_\nu) \subseteq U \setminus \{\bar{x}_0\}$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0$ και έστω και ένα $\varepsilon > 0$. Τότε:

$$(\exists \delta > 0)(\forall \bar{x} \in B(\bar{x}_0, \delta) \cap U \setminus \{\bar{x}_0\}) : |f(\bar{x}) - \ell| < \varepsilon$$

Από την άλλη $(\exists \nu_0 \in \mathbb{N}) \forall \nu \geq \nu_0 : \bar{x}_\nu \in U \cap B(\bar{x}_0, \delta) \setminus \{\bar{x}_0\}$

Άρα, $(\forall \nu \in \mathbb{N}) \forall \nu \geq \nu_0 : |f(\bar{x}_\nu) - \ell| < \varepsilon$.

ΠΡΟΤΑΣΗ Το όριο μιας συγκλίνουσας συνάρτησης f στο $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ (δηλ. όταν το $\bar{x} \to \bar{x}_0$) είναι μοναδικό και συμβολίζεται με:

$$\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f(\bar{x}) = l \in \mathbb{R}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ (Άλγεβρα ορίων)

Έστω $f, g : U \to \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ σσ του U

$\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f(\bar{x}) = l \in \mathbb{R}$ και $\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} g(\bar{x}) = m \in \mathbb{R}$

α) Τότε $\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} (f(\bar{x}) + g(\bar{x})) = l + m$

β) τότε $\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} (a \cdot f(\bar{x})) = a \cdot l$

γ) τότε $\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} (f \cdot g)(x) = l \cdot m$

δ) τότε $\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{l}{m}$

ε) τότε $\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} (h \circ f)(x) = h(l)$ για $h : V \to \mathbb{R}$ με $f(U) \subset V \subset \mathbb{R}$, συνεχής στο $l \in V$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

α) $\forall (\bar{x}_\nu) \subset U \setminus \{\bar{x}_0\}$: $f(\bar{x}_\nu) \to l$ και $g(\bar{x}_\nu) \to m$

$\Rightarrow \underbrace{f(\bar{x}_\nu) + g(\bar{x}_\nu)}_{(f+g)(x_\nu)} \to l + m$

Οι (γ), (δ) όμοια.

ε) $\forall (\bar{x}_\nu) \subseteq U \setminus \{\bar{x}_0\}$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0$ έχουμε $\underbrace{f(\bar{x}_\nu)}_{\in \mathbb{R}} \to l \in \mathbb{R}$

$\underset{\substack{h \text{ συνεχής} \\ \text{στο } l}}{\Rightarrow} \underbrace{h(f(\bar{x}_\nu))}_{(h \circ f)(\bar{x})} \to h(l)$

β) Προκύπτει από το (ε) εάν θεωρήσουμε $h(x) = ax$, $x \in \mathbb{R}$

Άσκηση

Έστω ότι $\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} f(\bar{x}) = \ell$

ΝΔΟ

α. $\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} |f(\bar{x})| = |\ell|$ και β. $\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} \sqrt{|f(\bar{x})|} = \sqrt{|\ell|}$

ΛΥΣΗ

για τα α. και β. επιλέγουμε

$h(x) = |x|$ και $\varphi(x) = \sqrt{|x|} = \sqrt{h(x)}$ είναι συνεχής

και προκύπτει σύμφωνα με την εξής προηγούμενη ιδιότητα:

$$\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} (\varphi \circ h) = \varphi(|x|)$$

Παράδειγμα:

α) Έστω η $f(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) = (x,x), \ x \neq 0 \\ 0, & (x,y) \neq (x,x) \end{cases}$

Να εξετάσετε ότι υπάρχει το όριο της f στο $(0,0)$ και να το υπολογίσετε

ΛΥΣΗ

Για να έχει η f όριο $\ell \in \mathbb{R}$ στο $(0,0)$ θα πρέπει:

$\forall (x_\nu, y_\nu) \to (0,0) \implies f(x_\nu, y_\nu) \to \ell \in \mathbb{R}$

Έστω $x_\nu = \frac{1}{\nu}, \nu \in \mathbb{N}$ και $y_\nu = 0$

όμως $(\frac{1}{\nu}, 0) \to (0,0) \iff \frac{1}{\nu} \to 0$ και $0 \to 0$

καθώς

$$f(\tfrac{1}{\nu}, 0) = 0 \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0$$

• Έστω $x_\nu = \frac{1}{\nu}, \nu \in \mathbb{N}$ και $y_\nu = \frac{1}{\nu}, \nu \in \mathbb{N}$

όμως $(\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu}) \to (0,0) \iff \frac{1}{\nu} \to 0$

καθώς

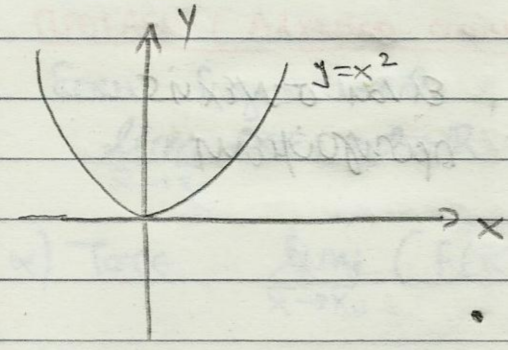
$$f(\tfrac{1}{\nu}, \tfrac{1}{\nu}) = 1 \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 1$$

άρα $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x)$

β) Έστω $g(x,y) = \begin{cases} x+a, & y=x^2, (x,y)\in\mathbb{R}^2 \\ 0, & y\neq x^2, (x,y)\in\mathbb{R}^2 \end{cases}$

Να εξετάσετε αν υπάρχουν $a\in\mathbb{R}$ ώστε το όριο να υπάρχει ($\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$). Τέλος, να βρεθεί το όριο.

<u>ΛΥΣΗ</u>



1) όταν $a\neq 0$

• $(0,\frac{1}{\nu})\to(0,0)$

$g(0,\frac{1}{\nu})\to 0$

• $(\frac{1}{\nu},\frac{1}{\nu^2})\to(0,0)$

$g(\frac{1}{\nu},\frac{1}{\nu^2})\to\frac{1}{\nu}+a$

$\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$

2) $a=0$

$g(x,y) = \begin{cases} x, & y=x^2 \\ 0, & y\neq x^2 \end{cases} \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2$

τότε $|g(x,y)|\leq|x|, \ \forall (x,y)\to(0,0)$

$|g(x_\nu,y_\nu)|\leq|x| \xrightarrow[\text{θ. ισοσυγκλ.}]{} 0$ δηλ. $g(x_\nu,y_\nu)\to 0$

γ) Έστω $f(\bar{x})=a+g(\bar{x})$ με $|g(\bar{x})|\leq c\cdot\|\bar{x}\|$ $\forall \bar{x}\in\mathbb{R}^n$ ΝΔΟ $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{0}} f(\bar{x})=a$

<u>ΛΥΣΗ</u>

Έχουμε $f(\bar{x})=f_1(\bar{x})+g(\bar{x})$, με $f_1(\bar{x})=a$

άρα $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{0}} f_1(\bar{x})=a$ (αφού $\bar{x}_\nu\to\bar{0}=(0,0,\dots,0) \Rightarrow$
$\Rightarrow f(\bar{x}_\nu)=a \xrightarrow[\nu\to\infty]{} a$)

Μένει νδο $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{0}} g(\bar{x})=0$

προφανώς αφού

$|g(\bar{x})|\leq c\cdot\|\bar{x}\|$ και λόγω ότι

$\forall \bar{x}_\nu\to 0 \Leftrightarrow \|\bar{x}_\nu\|\to 0$ τότε

$0\leq|g(\bar{x}_\nu)|\leq c\cdot\|\bar{x}_\nu\|$

0

από θ. ισοσυγκλινουσών $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{0}} g(\bar{x}_\nu)=0$.